RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 febbraio 1918.

F. D' Ovidio Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle serie di potenze sommate col metodo di Borel generalizzato.* Nota II [1] di Gustavo Sannia, presentata dal Socio Enrico d'Ovidio.

6. Per costruire le infinite stelle di sommabilità σ, (5) e τ della serie (1) basta cercare i loro raggi

$$\text{(12)} \qquad OG \geq \cdots \geq OP_{-1} \geq OP_0 \geq OP_1 \geq \cdots \geq OT$$

sopra ogni singola semiretta p uscente dal centro comune O. E poichè (n. 3)

$$OG = \lim_{r=-\infty} OP_r \quad , \quad OT = \lim_{r=+\infty} OP_r ,$$

basta cercare i raggi OP_r.

Limitiamoci dunque a considerare la (1) nei soli punti $z = \varrho e^{i\theta}$ di argomento assegnato θ (inclinazione di p sul semiasse positivo).

Premesso che l'integrale (3), col porre $z = \varrho e^{i\theta}$, $\varrho a = b$, si trasforma [2] in

$$\text{(3)'} \qquad \varrho^{r-1} e^{ri\theta} \int_0^\infty e^{-\frac{b}{\varrho}} u^{(r)}(be^{i\theta}, 1)\, db ,$$

esaminiamo il comportamento della funzione

$$\text{(13)} \qquad f_{r-1}(b, \varrho) = e^{-\frac{b}{\varrho}} u^{(r-1)}(be^{i\theta}, 1) = z^{1-r} e^{-a} u^{(r-1)}(a, z)$$

(1) Per la Nota I cfr. questi Rendiconti, pag. 98.

(2) Come l'integrale (6) nel n. 4.

quando b tende a $+\infty$, per ogni valore di $\varrho > 0$, eccetto per $\varrho = \varrho_r$ e $\varrho = \varrho_{r-1}$, ove ϱ_r è il modulo del punto P_r.

LEMMA. — *Quando b tende a $+\infty$, la funzione $f_{r-1}(b, \varrho)$: α) tende a zero se $0 < \varrho < \varrho_r$; β) non ha limite finito se $\varrho_r < \varrho < \varrho_{r-1}$; γ) ha il modulo non limitato se $\varrho_{r-1} < \varrho$.*

α) È stato già dimostrato incidentalmente al n. 4.

β) Osserviamo che, integrando per parti, si ha

$$\int_0^a e^{-a} u^{(r)}(a, z)\, da = e^{-a} u^{(r-1)}(a, z) - u_{r-1} z^{r-1} + \int_0^a e^{-a} u^{(r-1)}(a, z)\, da .$$

Ora in un punto z di p il cui modulo ϱ sia compreso fra ϱ_r e ϱ_{r-1}, questi esclusi (e quindi sia interno in senso stretto a σ_{r-1}, ma esterno a σ_r) la (1) è sommabile $(B, r-1)$, ma non (B, r); quindi, per $a = +\infty$, ha un limite finito l'integrale del secondo membro, ma non quello del primo membro; dunque neppure $e^{-a} u^{(r-1)}(a, z)$ può aver limite finito, e quindi, per la (13), $f_{r-1}(b, \varrho)$ non può aver limite finito per $b = +\infty$.

γ) Se $\varrho > \varrho_{r-1}$, assunto un numero ϱ' compreso fra ϱ e ϱ_{r-1}, questi esclusi, consideriamo la funzione di b

$$g(b) = b^2 e^{-\frac{b}{\varrho'}} u^{(r-1)}(be^{i\theta}, 1).$$

Tendendo b a $+\infty$, il suo modulo non può restare limitato, altrimenti l'integrale (3)′, ove si cambi r in $r-1$, sarebbe convergente (assolutamente) (1), quindi la (1) sarebbe sommabile $(B, r-1)$ nel punto (ϱ', θ) esterno alla stella σ_{r-1} (il che è impossibile). Ed allora *a fortiori* non resterà limitato il modulo della funzione (13), perchè, essendo $\varrho > \varrho'$, si ha (a partire da un certo $b > 0$)

$$e^{b\left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho}\right)} > b^2 \quad \text{o} \quad e^{-\frac{b}{\varrho}} > b^2 e^{-\frac{b}{\varrho'}} \quad \text{da cui} \quad |f_{r-1}(b, \theta)| > |g(b)| .$$

Dal lemma segue subito il

TEOREMA. — *La lunghezza ϱ_r del raggio OP_r della stella σ_r è il limite superiore dei valori di ϱ per i quali la funzione $f_{r-1}(b, \theta)$ ha un limite finito (che è necessariamente nullo) per $b = +\infty$.*

Altrimenti: *su ogni semiretta p uscente da O l'estremo P_r del raggio OP_r della stella σ_r è il limite dei punti z di p nei quali*

$$\lim_{a=+\infty} e^{-a} u^{(r-1)}(a, z) = 0 . \tag{14}$$

(1) Infatti il modulo del suo integrando vale $b^{-2} g(b)$, ed è ben noto che:

$$\int_0^\infty b^{-k} g(b)\, db$$

convergente, se $k > 1$ e $g(b)$ resta limitata quando b tende a $+\infty$.

7. Sia $z = \varrho e^{i\vartheta}$ un punto P interno in senso stretto al raggio OG della stella σ e giacente su p. P è necessariamente anche interno in senso stretto al raggio OP_r di qualcuna σ_r delle stelle (5), quindi (n. 4) in esso la (1) è assolutamente sommabile (B , $r-1$) ed ha per somma (n. 2)

$$(15) \qquad u(z) = U_{r-2}(z) + \int_0^\infty e^{-a}\, u^{(r-1)}(a\,,\, z)\, da\,,$$

ove $U_{r-2}(z)$ vale zero se $r < 2$ ed è un polinomio se $r \geq 2$; ossia, applicando le solite trasformazioni,

$$(15)' \qquad u(\varrho e^{i\vartheta}) = U_{r-2}(\varrho e^{i\vartheta}) + \varrho^{r-2}\, e^{(r-1)i\vartheta} \int_0^\infty e^{-\frac{b}{\varrho}}\, u^{(r-1)}(be^{i\vartheta}\,,\, 1)\, db\,,$$

ove l'integrale è assolutamente convergente.

Ora, detta η una variabile complessa, consideriamo i due integrali

$$(16) \qquad \int_0^\infty e^{-\frac{b}{\eta}}\, u^{(r-1)}(be^{i\vartheta}\,,\, 1)\, db \quad , \quad \int_0^\infty \frac{b}{\eta^2}\, e^{-\frac{b}{\eta}}\, u^{(r-1)}(be^{i\vartheta}\,,\, 1)\, db\,.$$

Il modulo di ciascuno degli integrandi (di cui il secondo è la derivata del primo rispetto a η) è minore del modulo dell'integrando di (15') (almeno a partire da un certo $b > 0$) se la parte reale di $\frac{1}{\eta}$ è maggiore di $\frac{1}{\varrho}$ [1] o (come subito si vede) se η è interno in senso stretto al cerchio C che ha per diametro OP. Ne segue che gli integrali (16) sono convergenti uniformemente in ogni area interna a C e perciò che il secondo rappresenta la derivata del primo rispetto a η; sicchè questo è funzione analitica olomorfa di η nell'interno di C, anzi nell'interno del cerchio che ha per diametro OG, perchè P può prendersi su OG vicino a G quanto si vuole.

Tale sarà quindi anche la funzione

$$U_{r-2}(\eta e^{i\vartheta}) + \eta^{(r-2)}\, e^{(r-1)i\vartheta} \int_0^\infty e^{-\frac{b}{\eta}}\, u^{(r-1)}(be^{i\vartheta}\,,\, 1)\, db$$

che, col porre $\eta e^{i\vartheta} = \zeta$ (che cade ancora nel detto cerchio) diventa

$$(17) \qquad \varphi(\zeta) = U_{r-2}(\zeta) + \zeta^{r-2}\, e^{i\vartheta} \int_0^\infty e^{-\frac{kb}{\zeta}}\, u^{(r-1)}(be^{i\vartheta}\,,\, 1)\, db\,, \quad (k = e^{i\vartheta}).$$

[1] Per il primo integrando la cosa è evidente. Per il secondo basta dimostrare che si ha $|b\eta^{-2} e^{-\frac{b}{\eta}}| < e^{-\frac{b}{\varrho}}$. Posto $\eta = te^{i\alpha}$, questa diventa

$$t^{-2} b e^{-\frac{b\cos\alpha}{t}} < e^{-\frac{b}{\varrho}} \quad \text{o} \quad t^{-2} b < e^{kb} \quad \text{ove} \quad k = \frac{\cos\alpha}{t} - \frac{1}{\varrho}$$

ed è certamente soddisfatta (a partire da un certo b) se $k > 0$, cioè se la parte reale di $\frac{1}{\eta}$ è maggiore di $\frac{1}{\varrho}$.

Intanto, quando ζ cade sul diametro OG, cioè $\zeta = \varrho e^{i\theta}$, $\varphi(\zeta)$ coincide con $u(z)$, come risulta dal confronto con la (15)', dunque:

Teorema (1). — *La somma $u(z)$ della serie* (1) *su ogni raggio della stella σ assume i valori di una funzione analitica che è olomorfa nell'interno in senso stretto del cerchio che ha per diametro il raggio stesso.*

8. Fin qui non abbiamo fatta alcuna ipotesi sul cerchio di convergenza γ della (1), anzi di esso non ci siamo mai serviti. *Ora supponiamo che il suo raggio non sia nullo.*

Allora la somma $u(z)$ della serie è funzione analitica olomorfa in γ, anzi, come ha dimostrato il Borel (loc. cit., cap. IV) nella stella τ.

Per il teorema precedente, questa funzione può proseguirsi analiticamente in ogni cerchio che abbia per diametro un raggio OG di σ, conservandosi olomorfa in ogni cerchio che abbia per diametro OG' (ove G' è un punto interno ad OG) *contorno incluso.*

Ne segue (2) che la (1) è assolutamente sommabile in G', cioè che G' appartiene anche al raggio corrispondente OT della stella τ; ma G' è un punto qualunque di OG; dunque non solo i punti interni a OT cadono in OG (come accade sempre), ma qui anche viceversa, e perciò OG e OT coincidono, e con essi coincidono necessariamente i raggi OP_r delle stelle (5). Concludendo;

Per una serie (1) *con raggio di convergenza non nullo tutte le stelle di sommabilità σ,* (5) *e τ coincidono.*

Dunque per una tal serie il metodo di Borel generalizzato non dà quasi nulla più che il metodo originario (B, o) limitato alle serie assolutamente sommabili. Diciamo « quasi » perchè *non è escluso che esso possa sommare la* (1) *in punti del contorno di τ nei quali la* (1) *non sia assulutamente sommabile* (3). Sicchè la sua maggiore potenza può efficacemente esplicarsi solo sopra serie con raggio di convergenza nullo.

Osserviamo per finire che per le serie che qui consideriamo la determinazione dei raggi OT della (unica) stella di sommabilità τ è più semplice, poichè essi coincidono con quelli di una qualsiasi delle stelle σ_r, dati dal teorema del n. 6.

(1) È l'estensione alla stella σ di un teorema di Borel relativo alla stella τ (*Leçons sur les séries divergente*, pag. 118). Esso ci dà ragione di molte proprietà della funzione $u(z)$ dimostrate nelle Note citate al n. 1.

(2) Per il teorema di Borel (loc. cit., pag. 122): se la funzione analitica $u(z)$ somma della (1) è olomorfa nell'interno di una circonfereaza passante pel punto O *e sulla circonferenza*, la serie (1) è assolutamente sommabile sul diametro che passa per O, *estremi inclusi.*

(3) Per tal rispetto sta alla teoria delle serie assolutamente sommabili, come il metodo di sommazione di Cesàro sta al metodo classico, perchè il metodo di Cesàro non può sommare la (1) che in punti del contorno del suo cerchio di convergenza (oltre che nei punti interni).

Chimica. — *I composti del fluoruro e del cloruro con il fosfato di piombo* (1). Nota di M. Amadori, presentata dal Socio G. Ciamician.

In una ricerca termica da me compiuta alcuni anni fa (2) sul sistema fluoruro-fosfato di piombo, veniva stabilita la formazione di un composto (3 fosfato + 1 fluoruro) del tipo della piromorfite caratterizzato da un massimo nella temperatura di solidificazione delle miscele.

I dati termici delle esperienze avevano condotto ad ammettere una trasformazione sia per il fosfato, che per il composto; inoltre si aveva concluso per una larga miscibilità allo stato solido tra composto, fosfato e fluoruro nelle modificazioni stabili ad alta temperatura; la miscibilità diventava assai limitata tra composto, fosfato e fluoruro nelle modificazioni stabili a bassa temperatura.

Il fluoruro adoperato solidificava a 820°, il fosfato a 1006°, il composto a 1046°. Le temperature di trasformazione erano risultate a 782° per il fosfato, al 696° per il composto.

Ulteriori ricerche hanno mostrato che questi risultati, basati esclusivamente sui dati termici, non corrispondono ai fenomeni caratteristici del sistema fluoruro-fosfato di piombo. La causa di questa diversità va ricercata nella natura del fosfato di piombo allora adoperato. Esso proveniva dalla ditta Kahlbaum. Ho già fatto vedere in altra Nota (3) che tale fosfato, quantunque all'analisi risultasse come ortofosfato sufficientemente puro, conteneva in realtà un lieve eccesso di ossido di piombo; inoltre esso doveva contenere una sostanza estranea presente in piccolissima quantità, di cui non fu possibile stabilire la natura, ma che si deve ammettere presente per l'andamento assunto dai fenomeni. L'uno e l'altra non influivano sensibilmente sui dati d'analisi; anzi la sostanza estranea presente si contrapponeva, almeno in parte, al lieve eccesso di ossido di piombo; poca influenza portavano pure sulla quantità di anidride fosforica che nel sale costituisce un percento meno elevato.

La presenza del piccolo eccesso in ossido di piombo produceva la leggera variazione termica che si osservava nel raffreddamento di quel fosfato dovuta al depositarsi di una piccola miscela eutettica: infatti, aggiungendo a questo fosfato una quantità di anidride fosforica tale da togliere l'eccesso di ossido di piombo, quella variazione termica non si osserva più, ed il punto di solidificazione dell'ortofosfato sale da 1006° a 1014°.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Padova.
(2) Questi Rendiconti, XXI, 2° sem., pag. 768 (1912).
(3) Atti R. Istituto Veneto, LXXV, II, 419 (1916 17).

La presenza della sostanza estranea, come è già stato detto, è provata dalla sensibile azione che essa esercita su alcuni fenomeni. Così si è visto che, mentre praticamente non ha alcuna influenza sulla temperatura di solidificazione dell'ortofosfato, abbassa sensibilmente la temperatura di solidificazione dell'ortofosfato che si forma dalle miscele con l'ossido ed impedisce la formazione per solidificazione del tetrafosfato.

La presenza del lieve eccesso di ossido di piombo e della piccola quantità di sostanza estranea esercita una notevole influenza anche sui fenomeni che si hanno nello studio del sistema fluoruro-fosfato.

Così la variazione termica osservata nella solidificazione del composto è dovuta alla separazione di una piccola quantità di miscela eutettica; essa fu erroneamente attribuita, come per il fosfato, ad una trasformazione del composto.

La diversità del fenomeno non appariva dalla semplice ricerca termica; infatti, anche a motivo della temperatura assai elevata, non era possibile apprezzare la esistenza di una parte fluida separantesi a quella temperatura, e presente in piccola quantità rispetto alla massa per la maggior parte solida. Su frammenti ottenuti dalla massa fusa, solidificata e triturata, riscaldati ulteriormente al di sopra della temperatura della pretesa trasformazione, ho potuto osservare come a questa temperatura si abbia realmente un principio di fusione.

Che realmente il fenomeno sia di questa natura, risulta quando si aggiunga alla massa una quantità di anidride fosforica tale da trasformare il fosfato in ortofosfato reale, oppure si impieghi ortofosfato preparato in laboratorio: in tali casi quella variazione termica manca completamente.

Nelle miscele del composto con il fluoruro e con il fosfato la mancanza di arresti eutettici che apparentemente risultava, aveva indotto a supporre una larga miscibilità tra le modificazioni stabili ad alta temperatura e una trasformazione e scissione dei presunti cristalli misti con formazione di un eutettoide in solido tra le modificazioni stabili a bassa temperatura, poco o nulla miscibili tra loro. Si trattava in realtà di eutettici binari riunentisi in eutettico ternario che segnava la fine di cristallizzazione della fase liquida.

È inutile dare qui una spiegazione dettagliata dei fenomeni allora osservati che del resto risulta evidente dal diagramma dopo quanto fu detto: d'altra parte non avrebbe alcun valore dilungarsi su questo punto.

Lo studio del sistema fluoruro-fosfato venne ripetuto totalmente impiegando ortofosfato preparato in laboratorio, aggiungendo al pirofosfato di piombo la quantità richiesta di ossido di piombo: il pirofosfato a sua volta veniva ottenuto per precipitazione dal nitrato di piombo con fosfato bisodico.

Il fluoruro di piombo adoperato solidificava a 820°, il fosfato a 1014°; la fusione delle miscele venne eseguita in crogiolo di platino entro un forno a resistenza di nichel: la massa era costituita da circa 25 gr. di sostanza.

TABELLA I. — *Fluoruro-fosfato.*

% in peso $Pb_3(PO_4)_2$	% molec. $Pb_3(PO_4)_2$	Inizio di cristallizzazione	Arresto eutettico	
			Temperatura	Durata per 25 gr.
0	0	820°	—	—
7.80	2.5	774	698°	50″
14.82	5	746	698	90
21.14	7.5	—	698	150
26.86	10	742	698	120
36.85	15	800	698	100
45.25	20	846	698	90
58.08	30	922	698	70
63.52	35	946	698	60
76.80	50	1032	695	40
83.22	60	1072	694	30
86.20	65	1084	690	20
88.54	70	1092	686	10
90.85	75	1098	—	—
92.83	80	1094	1000	30
94.83	85	1080	1004	70
96.75	90	1058	1004	100
98.40	95	1032	1004	140
100	100	1014	—	—

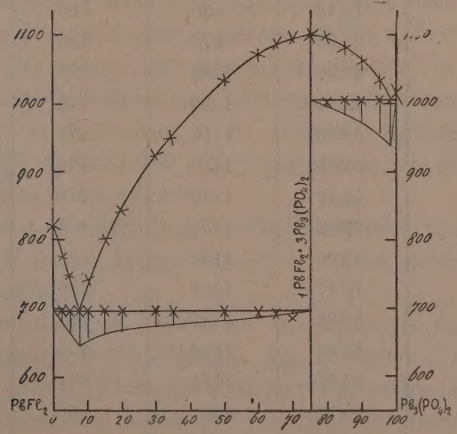

FIG. 1. — Fluoruro-fosfato.

Tra i due sali si ha la formazione di un composto che è caratterizzato da un massimo nella curva di cristallizzazione: esso ha la composizione $3\,Pb_3(PO_4)_2 \cdot 1\,Pb\,Fl_2$, solidifica a 1098° e corrisponde nella composizione alla *fluoropiromorfite*.

Con i componenti il composto si separa in miscugli eutettici che si estendono dal fluoruro e dal fosfato fino circa alla concentrazione del composto. Si può quindi ritenere nulla o assai piccola la miscibilità del composto con i componenti.

Nessuna trasformazione si osserva nel raffreddamento del composto.

Ho potuto compiere anche lo studio completo del sistema cloruro-fosfato che nelle prime ricerche avevo abbandonato per la volatilità del cloruro. Avevo tuttavia fatto allora notare come dalle poche esperienze fatte si potesse presumere la formazione di un composto analogo a quello avuto per il fluoruro.

Fu possibile lo studio del sistema impiegando come recipiente di fusione, invece del crogiuolo aperto di platino, provette di porcellana sverni-

TABELLA II. — *Cloruro-fosfato.*

% in peso $Pb_3(PO_4)_2$	% molec. $Pb_3(PO_4)_2$	Inizio di cristallizzazione	Arresto eutettico	
			Temperatura	Durata per 25 gr.
0	0	494°	—	—
12	4.44	—	480	220″
20	7,84	?	480	190
30	12.81	792	480	170
40	18.48	890	480	140
50	25.55	974	480	120
65	38.90	1062	478	110
70	44.44	1090	475	90
74.48	50.00	1110	474	80
80	57.63	1130	474	50
85	65.84	1145	470	20
87.5	70.42	1150	468	10
89.74	75.00	1156	—	—
92	79.77	1150	986	30
94	84.31	1135	990	50
95	86,68	1126	994	90
97.5	93 05	1074	994	130
98.5	95.75	1040	996	160
100	100	1014	—	—

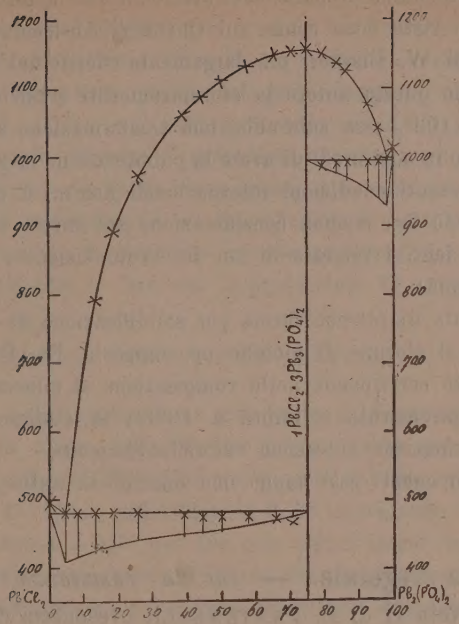

Fig. 2. — Cloruro-fosfato.

ciate. Esse vengono intaccate solo leggermente da questi sali di piombo; la quantità di cloruro che sublima in recipiente stretto e a forma alta non è molto forte ed in gran parte si condensa liquida sulle pareti della provetta per ricadere nella massa. La volatilità del cloruro è assai diminuita nelle miscele in cui esso è totalmente legato al fosfato come composto: una maggiore volatilizzazione si ha per le miscele da 20 a 70 % mol. fosfato, ma data la natura del sistema, per queste concentrazioni le alterazioni, del resto non eccessive, nella composizione della massa possono essere trascurate.

Si ha qui pure la formazione di un composto $3\,Pb_3(PO_4)_2 \cdot 1\,Pb\,Cl_2$ che solidifica a 1156° e corrisponde nella composizione alla *cloropiromorfite* che si trova in natura come minerale.

Con i componenti si separa in un miscuglio eutettico, dalla cui presenza per le varie miscele, si può dedurre una nulla o assai lieve miscibilità tra composto e componenti.

Nessuna trasformazione si osserva nel raffreddamento del composto.

Venne anche seguìto il riscaldamento fino a 900° e il successivo raffreddamento di 60 grammi di minerale finemente polverizzato tenendovi immersa la pila termoelettrica; anche per la piromorfite naturale non si osservò termicamente alcuna trasformazione.

A proposito della preparazione artificiale delle piromorfiti e del loro dimorfismo ho visto fatto cenno sul Chemical Abstracts (1914, pag. 1944) di un lavoro di W. Eissner, più largamente riferito nel N. J. f. Min. 1914, I, 205. Secondo questo autore la cloropiromorfite artificiale da lui preparata fonderebbe a 1103°, essa subirebbe una trasformazione a 670°.

Ho cercato in varî modi di avere la pubblicazione originale dell' Eissner ma date le presenti condizioni internazionali non mi fu possibile procurarla. Non posso perciò fare alcuna considerazione sul lavoro di Eissner, non sembrandomi sufficienti i referata di cui ho avuto visione.

Riassumendo:

L'ortofosfato di piombo forma per solidificazione di miscele fuse con il fluoruro e con il cloruro di piombo un composto $Pb_3(PO_4)_2 . Pb(Fl, Cl)_2$: questo composto corrisponde nella composizione al minerale « piromorfite ».

La fluoropiromorfite solidifica a 1098°, la cloropiromorfite a 1156°; nessuna trasformazione subiscono nel raffreddamento.

Con i componenti essi hanno una miscibilità nulla o assai limitata.

Patologia vegetale. — *Su la resistenza delle piante al freddo* (1). Nota II di E. Pantanelli, presentata dal Socio Cuboni.

Girasole. — Queste piante, tolte da una temperatura di 12° C., furono raffreddate a —3,5°, impiegando 3 ore. La temperatura fu mantenuta a —3,5° per 2 ore, indi si lasciò risalire fino a 6°, in 15 ore. Le piante furono allora riportate alla temperatura ambiente di 12°. Gravemente danneggiate apparvero le colture V (KNO_3) e II ($NaNO_3$), poco meno la VII ($MgSO_4$) e VIII (Na_2SO_4). La sofferenza fu molto minore nella III, IX e X, trascurabile nella IV, VI e I; in quest'ultima, cioè in quella che non aveva ricevuto alcun sale, le piante resistettero meglio di tutte. Nel girasole l'apice del fusto e le foglie giovani soffrirono maggiormente.

I nitrati depressero la resistenza anche nel girasole; il loro effetto deprimente fu neutralizzato dalla potassa e dall'acido fosforico. Nulla di più si poteva dedurre dalle apparenze esterne; nessun rapporto passava fra la concentrazione del liquido ambiente, il valore alimentare dei sali forniti e la resistenza al gelo.

Anche nel girasole non constatai relazione fra pressione osmotica del succo e la resistenza al gelo. Vi era invece un rapporto discretamente rispettato con la concentrazione in peso delle sostanze solubili, maggiore nelle piante resistenti. La proporzione di minerali solubili era maggiore nelle colture X, IX, VIII, VII e V, ossia là dove le radici erano bagnate da un

(1) Ricerche eseguite nella R. Stazione di Patologia vegetale di Roma.

liquido più concentrato, ma ciò non ebbe effetto sulla resistenza. L'acidità libera era elevata nella coltura I (resistente), ma non meno nella VII (delicata), mentre era bassa nella IX e X (abbastanza resistenti).

Lo zucchero prevaleva, prima del raffreddamento, nelle colture con nitrato (II, V, IX e X) e con solfato di magnesio (VII), ossia in piante più o meno resistenti. Durante il raffreddamento esso scomparve totalmente. Ma intanto si sciolse più amido nelle piante più resistenti, che ebbero così a disposizione più zucchero nell'ora del cimento. Si noti che la resistenza non fu in relazione con la ricchezza iniziale o residuale in amido — a differenza della barbabietola — ma con la proporzione di amido disciolto.

Esperienze a temperature superiori a quella di congelamento.

Pomodoro. — Le piante, bene sviluppate a temperatura molto elevata (fra 19° e 38°, in media 28°), furono prima tenute un'ora in ambiente a 18° C., indi riposte (il 13 luglio) nella cella del frigorifero, ove, da una temperatura di 14°, furono raffreddate a 0,7°, impiegando 12 ore. La temperatura fu mantenuta a 0,7° per due ore, indi si lasciò risalire fino a 7,8°, in 10 ore. Le piante furono allora riportate alla temperatura ambiente di 18°. Appena tolte dal frigorifero apparivano quasi tutte danneggiate, palesandosi la sofferenza con l'avvizzimento delle parti più adulte; ma bastarono 4 ore di soggiorno a 18° per farne rimettere parecchie. Considerai quindi definitivamente danneggiate dal freddo solo quelle che non riuscirono a riacquistare il primitivo turgore; non può tuttavia sfuggire l'importanza della constatazione, che bastò — in specie amanti del caldo — un forte abbassamento della temperatura (senza congelazione) per causare una fortissima traspirazione o perdita di acqua (entro certi limiti perfettamente reversibile), contrariamente a quanto si sarebbe aspettato, e tanto più notevole in quanto accadde in ambiente saturo di umidità e con terreno saturo di umidità. Delle cause di questo fenomeno, che ritengo essenziale per spiegare la morte per freddo, e che ho ulteriormente studiato, ci occuperemo in un'altra Nota.

Per ora limitiamoci a riferire, che le colture di pomodoro più danneggiate rimasero la VII ($MgSO_4$) e la prima, a rovescio di quanto si era visto nelle piante precedenti. Seguivano la VIII (Na_2SO_4) e la IX. La III ($(NH_4)_2CO_3$) appariva aver sofferto un po' meno, ma ancora non poco; meno danneggiate erano la IV ($KHCO_3$) e la V (KNO_3). La VI (KH_2PO_4) se l'era scampata abbastanza bene, e quasi del tutto illese apparivano la X e la II ($NaNO_3$); quest'ultima apparve la più resistente di tutte. Una serie di sofferenza, in ordine decrescente, tatalmente diversa da quella osservata nei precedenti casi.

Nessun rapporto potè constatarsi con l'umidità residuale del terreno — che si mantenne elevata durante tutta l'esposizione — nè con la pressione

osmotica del liquido del suolo. Anche fra la concentrazione osmotica del succo cellulare e la resistenza al freddo non correva alcuna relazione, mentre fu constatato che le piante meno resistenti avevano i succhi più poveri di estratto. La salinità relativa dell'estratto era molto minore nelle piante resistenti, ossia il loro succo conteneva più sostanze organiche disciolte, rispetto alle piante che più soffrirono. Faceva eccezione la coltura X, con succo molto ricco di sali, e pur ben resistente.

Fra le sostanze organiche disciolte nel succo cellulare, nè gli acidi liberi, nè quelli combinati, che erano in quantità molto maggiore, nè gli zuccheri mostravano, prima del raffreddamento, un rapporto col grado di resistenza al freddo. Però durante il raffreddamento accadde in tutte queste piante la distruzione totale dello zucchero, che non fu compensata da corrispondente scioglimento dell'amido nelle piante che più rimasero danneggiate. Invece nelle piante resistenti si sciolse più amido, per cui esse ebbero a disposizione più zucchero nelle ore di freddo.

L'acidità combinata non variò o diminuì un poco nelle piante più resistenti, aumentò fortemente in quelle più danneggiate, più ancora di quanto ebbe a diminuire l'acidità libera; questa invece rimase costante ed aumentò nelle piante che meglio tollerarono il freddo. Tale relazione si spiegherebbe ammettendo che gli acidi fossero più utilizzati per la respirazione nelle piante più delicate, e che in esse avvenisse — per decomposizione di albumine o di aminoacidi — una formazione di basi ammoniche o di ammoniaca addirittura (1).

Mais. — Fu allevato accanto alla precedente serie, fino alla fioritura. Da una temperatura ambiente di 20° C., le piante furono trasportate nel frigorifero a 13°, e raffreddate a 2°, ciò che si ottenne (il 26 luglio) in 23 ore. La temperatura fu mantenuta a 2° per 7 ore, indi le piante furono riportate alla temperatura ambiente di 21,8°, e subito esaminate. Il danno apparve allora assai diverso nelle singole colture (2). La massima sofferenza si aveva nel vaso VIII (Na_2SO_4); subito dopo venivano i vasi III ($(NH_4)_2CO_3$) e II ($NaNO_3$); poco meno danneggiate erano la V (KNO_3) e la IX; poi la X e la VII ($MgSO_4$). In condizioni molto migliori erano la IV ($KHCO_3$) e la VI (KH_2PO_4); la I mostrava una sola foglia adulta un po' afflosciata.

Non passava alcun rapporto fra la prosperità dello sviluppo delle parti aeree o delle radici e la resistenza al freddo. I nitrati e in generale la forte nutrizione azotata depressero la resistenza; la potassa e l'acido fosforico osta-

(1) La decomposizione delle albumine, conformazione di ammoniaca o di amine, quando manca o scarseggia il carbidrato solubile utilizzato per la respirazione, è un fatto già noto per le ricerche di Palladin, Butkevic, Rubner ed altri. Nell'uva congelata accade secondo Muth (1913) una solubilizzazione di azoto.

(2) La temperatura di congelazione del mais in natura è —2° C.

colarono un po' quest'azione sfavorevole, ma meglio di tutte resistettero le piante che non avevano ricevuto alcun sale.

In generale la sofferenza crebbe con l'aumento della concentrazione del liquido del suolo. Faceva eccezione la coltura III, ma in questa la reazione alcalina del liquido ambiente doveva ostacolare l'attività radicale, ciò che conferma la deduzione, tratta dalla misura della quantità d'acqua assorbita durante il raffreddamento, che la depressione dell'attività radicale diminuisce la resistenza al freddo.

Nelle piante di mais più resistenti non trovai una maggior concentrazione molecolare del succo cellulare. Durante il raffreddamento la pressione osmotica del succo aumentò in ragione inversa dell'appassimento. Introducendo questa correzione, l'aumento di pressione si cambia in una diminuzione, proporzionale al grado di sofferenza, restando un effettivo aumento di concentrazione solo per la coltura I. che fu la più resistente. Pare quindi che vi sia un nesso fra la resistenza al freddo ed il potere di regolare la pressione osmotica del succo cellulare, mantenendola invariata od aumentandola durante il raffreddamento.

Si trovò inoltre una relazione con la concentrazione in peso del succo cellulare, e con la distruzione di sostanze disciolte, che si ebbe durante il raffreddamento e fu all'incirca proporzionale alla sofferenza. Ciò fa ritenere che le sostanze importanti per la resistenza abbiano un peso molecolare elevato.

Fra le sostanze disciolte nel succo cellulare, i sali minerali non costituivano una proporzione maggiore nelle piante meno sensibili. Durante il raffreddamento, la proporzione di minerali solubili crebbe nelle piante più danneggiate, ed in misura maggiore di quanto corrispondeva alla detta distruzione delle sostanze organiche disciolte. Doveva quindi accadere una profonda decomposizione di quelle sostanze insolubili, di cui facevano parte gli elementi minerali che passavano nel succo.

Mentre non vi era relazione fra l'acidità, libera e combinata, prima del raffreddamento, e la resistenza al freddo, si constatò poi che durante il raffreddamento aumentarono gli acidi organici nel succo delle foglie che tollerarono meglio il freddo, mentre prevalse la distruzione degli acidi nelle foglie più danneggiate. Nei culmi la relazione fu meno netta.

Le piante più ricche di zuccheri prima della prova non furono sempre le più resistenti. Piuttosto, più resistenti furono le foglie che durante il raffreddamento riuscirono a conservare invariato il loro contenuto zuccherino (IV e VI) od anzi lo accrebbero (I), mentre nelle altre avvenne una distruzione dello zucchero, tanto più forte quanto maggiore fu il danno. Nei culmi — che nel mais contengono molto più zucchero che le foglie — la relazione fu anche più netta. Intanto anche i carbidrati plastici insolubili diminuirono di più nelle piante che non tollerarono il raffreddamento; nelle piante

resistenti si ebbe anzi un aumento della somma dei carbidrati plastici (solubili ed insolubili), ciò che poteva essere causato, più che da un aumento dell'amido, dall'idrolisi di qualche carbidrato (pectina od emicellulosa), la cui natura non fu determinata (1).

Ricapitolando i fatti osservati:

1. Non vi fu relazione diretta fra la resistenza al freddo e il valore alimentare dei sali forniti alla pianta. I nitrati per lo più depressero la resistenza, il potassio e l'acido fosforico si opposero all'azione sfavorevole dei nitrati, ma non esaltarono la resistenza.

2. Non si notò alcun rapporto fra la prosperità dello sviluppo e la resistenza al freddo.

3. La concentrazione del liquido del suolo in quattro piante non influenzò la resistenza, in una la depresse (mais).

4. Non si potè constatare alcun rapporto fra la concentrazione molecolare (pressione osmotica) del succo cellulare e la resistenza al raffreddamento. Nel mais resistettero meglio le piante che riuscirono a conservare elevata o ad aumentare la pressione osmotica del succo durante il raffreddamento.

5. Nessuna relazione passava fra la resistenza e la densità del succo nel grano e nella barbabietola; nel girasole, pomodoro e mais le piante più resistenti avevano un succo più ricco di estratto.

6. La proporzione di minerali disciolti nel succo non influì sulla resistenza; nel pomodoro anzi le piante più resistenti avevano un succo più povero di costituenti minerali. Durante il raffreddamento avvenne nelle piante più sensibili di mais una solubilizzazione di minerali.

7. Nessuna relazione si notò fra la resistenza e la proporzione di acidi, liberi o combinati, esistenti nel succo prima del raffreddamento. Durante il raffreddamento si ebbe aumento di acidità nelle piante più resistenti di mais, ma anche nelle piante meno resistenti di pomodoro.

8. Nessun rapporto passava, prima del raffreddamento, fra la ricchezza in zucchero od in carbidrato plastico e la resistenza. Furono però più danneggiate le piante che durante il raffreddamento ebbero a disposizione meno zucchero, sia perchè questo fu distrutto in maggior copia, sia perchè non si sciolse abbastanza amido.

9. Le dette relazioni furono constatate tanto nella morte per congelamento come nella morte per semplice raffreddamento. In ambo i casi il prosciugamento degli organi fu proporzionale alla sofferenza ed ebbe luogo, sebbene l'ambiente fosse saturo di umidità.

(1) Il rigonfiamento e la parziale idrolisi dell'emicellulosa e della pectina sono già noti per i processi di gelificazione (gommosi) della lamella mediana o sostanza intercellulare, che seguono ad un brusco raffreddamento.

Per ora mi limito a trarre da queste constatazioni due deduzioni generali:

la sottrazione di calore per l'abbassamento inframinimale di temperatura è la causa essenziale della morte per freddo, e ad essa si oppone la resistenza dell'organo, mentre la formazione di ghiaccio è un fenomeno accessorio;

la resistenza al freddo non è in relazione con la concentrazione del succo cellulare, nè col suo tenore in acidi o sali, ma con la proporzione di zucchero, che la cellula riesce a conservare durante il raffreddamento.

Vedremo in seguito, se lo zucchero interviene solo come fonte di energia o se anche protegge il protoplasma contro l'autodigestione, come fa prevedere la sua forte azione antiproteolitica. Nelle ulteriori esperienze ho anche cercato di valutare a parte l'azione del freddo sull'attività radicale e sul trasporto di acqua dalle radici alle foglie, poichè tale azione non può evitarsi esponendo le piante nel frigorifero.

E. M.